10 DERET FOURIER

10.1. FUNGSI PERIODIK

Suatu fungsi $f(x)$ dikatakan mempunyai periode T atau periodik dengan periode T jika untuk setiap x berlaku $f(x + T) = f(x)$, di mana T konstanta positif. Nilai positif terkecil T dinamakan periode terkecil atau disingkat periode $f(x)$.

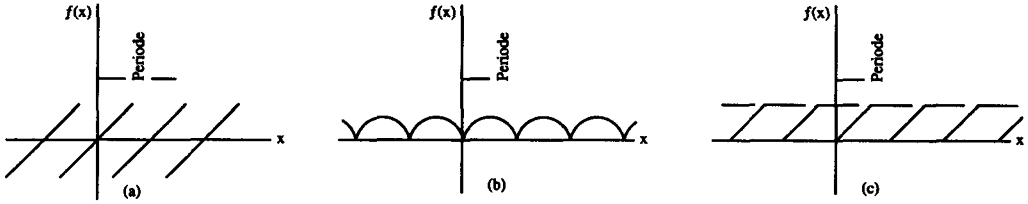
Contoh 1. Fungsi sin x mempunyai periode 2π, 4π, 6π, . . .karena sin $(x + 2\pi)$, sin $(x + 4\pi)$, sin $(x + 6\pi)$, . . . sama dengan sin x. Tetapi 2π adalah periode terkecil atau periode sin x.

Contoh 2. Periode fungsi sin nx atau cos nx, di mana n bilangan bulat positif, adalah $2\pi/n$.

Contoh 3. Periode tan x adalah π.

Contoh 4. Suatu konstanta mempunyai periode suatu bilangan positif.

Contoh lainnya dari fungsi periodik ditunjukkan dalam grafik pada Gambar 10-1(a), (b) dan (c) di bawah.



Gambar 10-1

10.2 DERET FOURIER

Misalkan $f(x)$ didefinisikan pada selang (–L, L) dan di luar selang ini oleh $f(x + 2L) = f(x)$, yaitu diandaikan bahwa $f(x)$ mempunyai periode 2L. Deret Fourier atau uraian Fourier yang bersesuaian dengan $f(x)$ ditentukan oleh

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \sin \frac{n\pi x}{L}\right) \qquad \text{..........................(10-1)}$$

di sini koefisien Fourier a_n dan b_n adalah

$$\begin{cases} a_n = \dfrac{1}{L} \displaystyle\int_{-1}^{L} f(x) \cos \frac{n\pi x}{L}\, dx \\ b_n = \dfrac{1}{L} \displaystyle\int_{-L}^{L} f(x) \sin \frac{n\pi x}{L}\, dx \end{cases} \qquad n = 0, 1, 2, \ldots \qquad \text{...................(10-2)}$$

Jika $f(x)$ mempunyai periode 2L, maka koefisien a_n dan b_n dapat ditentukan ekivalen (setara) dengan bentuk

$$\begin{cases} a_n = \dfrac{1}{L} \displaystyle\int_{C}^{c+2L} f(x) \cos \frac{n\pi x}{L}\, dx \\ b_n = \dfrac{1}{L} \displaystyle\int_{C}^{c+2L} f(x) \sin \frac{n\pi x}{L}\, dx \end{cases} \qquad \text{..........................(10-3)}$$

di sini c suatu bilangan riil. Dalam kasus khusus, c = –L, (3) menjadi (2).

Untuk menentukan a_0 pada (1), kita gunakan (2) atau (3) dengan n = 0.

Sebagai contoh, dari (2) kita lihat bahwa $a_0 = \dfrac{1}{L} \displaystyle\int_{-L}^{L} f(x)\, dx$. Perhatikanlah bahwa suku konstanta pada (1) sama dengan $\dfrac{a_0}{2} = \dfrac{1}{2L} \displaystyle\int_{-L}^{L} f(x)\, dx$, yang merupakan rata-rata $f(x)$ pada suatu periodenya.

Jika L = π, deret (1) dan koefisien (2) atau (3) sangat sederhana. Fungsi dalam kasus ini mempunyai periode 2π.

10.3. SYARAT DIRICHLET

Teorema 10-1. Andaikan bahwa :

(1) $f(x)$ terdefinisi dan bernilai tunggal kecuali mungkin di sejumlah berhingga titik pada (–L, L).

(2) $f(x)$ periodik di luar (–L, L) dengan periode 2L.

(3) $f(x)$ dan $f'(x)$ kontinu bagian demi bagian pada (–L, L).

Maka deret (1) dengan koefisien (2) atau (3) konvergen ke :

(a) $f(x)$, bilamana x adalah suatu titik kekontinuannya.

(b) $\dfrac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$ bilamana x adalah suatu titik ketakkontinuannya.-

Pada teorema ini, $f(x+0)$ dan $f(x-0)$ berturut-turut adalah limit kiri dan limit kanan dari $f(x)$ di x dan menyatakan $\lim_{\varepsilon\to 0} f(x+\varepsilon)$ dan $\lim_{\varepsilon\to 0} f(x-\varepsilon)$ di sini $\varepsilon > 0$. Ini sering kali dituliskan $\lim_{\varepsilon\to 0+} f(x+\varepsilon)$ dan $\lim_{\varepsilon\to 0} f(x-\varepsilon)$ untuk menyatakan bahwa $\varepsilon\to 0$ dari arah nilai-nilai positif. Buktinya dapat dilihat pada Soal 10-18 dan 10-23.

Syarat (1), (2) dan (3) yang dinyatakan pada $f(x)$ adalah syarat cukup tetapi bukan syarat perlu, dan secara umum dalam prakteknya dipenuhi. Sekarang ini tidak diketahui syarat perlu dan cukup untuk kekonvergenan deret Fourier. Hal yang menarik adalah bahwa kekontinuan $f(x)$ tidak sendirian menjamin kekonvergenan suatu deret Fourier.

10.4. FUNGSI GANJIL DAN GENAP

Suatu fungsi $f(x)$ dinamakan *ganjil* jika $f(-x) = -f(x)$. Jadi x^3, $x^5 - 3x^3 + 2x$, sin x, tan 3x semuanya adalah fungsi ganjil.

Suatu fungsi $f(x)$ dinamakan *genap* jika $f(-x) = f(x)$. Jadi x^4, $2x^6 - 4x^2 + 5$, cos x, $e^x + e^{-x}$ semuanya adalah fungsi genap.

Fungsi yang grafiknya digambarkan pada Gambar 10-1(a) dan 10-1(b) berturut-turut adalah fungsi ganjil dan genap; tetapi pada Gambar 10-1(c) fungsinya tidak ganjil dan genap.

Dalam deret Fourier yang berkaitan dengan suatu fungsi ganjil, hanya suku-suku sinus yang dapat disajikan. Dalam deret Fourier yang berkaitan dengan suatu fungsi genap, hanya suku-suku cosinus (dan mungkin suatu konstanta yang kita pandang sebagai suatu suku cosinus) yang dapat disajikan.

10.5 DERET FOURIER SINUS ATAU KOSINUS SEPARUH JANGKAUAN (HALF RANGE)

Suatu deret Fourier sinus atau cosinus separuh jangkauan berturut-turut adalah suatu deret di mana yang disajikan hanya suku-suku sinus atau hanya suku-suku kosinus, maka fungsi tersebut didefinisikan pada selang (0, L) [separuh selang (–L, L), yang merupakan penjelasan untuk istilah separuh jangkauan] dan kemudian fungsi tersebut dikelompokkan sebagai ganjil atau genap, agar ia dapat didefinisikan pada separuh selang lainnya, namakanlah (–l, 0). Dalam kasus ini, diketahui :

$$\begin{cases} a_n = 0, \quad b_n = \dfrac{2}{L}\displaystyle\int_0^L f(x) \sin \dfrac{n\pi x}{L}\, dx & \text{untuk separuh jangkauan deret sinus} \\ b_n = 0, \quad a_n = \dfrac{2}{L}\displaystyle\int_0^L f(x) \cos \dfrac{n\pi x}{L}\, dx & \text{untuk separuh jangkauan deret cosinus} \end{cases} \qquad \text{.........................(4)}$$

IDENTITAS PARSEVAL

Identitas ini menyatakan bahwa

$$\frac{1}{L}\int_{-L}^{L} \{f(x)\}^2 dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) \qquad \text{.......................(5)}$$

jika a_n dan b_n adalah koefisien Fourier yang bersesuaian dengan $f(x)$ dan jika $f(x)$ memenuhi syarat Dirichlet.

10.6. PENDIFFERENSIALAN DAN PENGINTEGRALAN DERET FOURIER

Pendifferensialan dan pengintegralan deret Fourier dapat dikerjakan dengan menggunakan teorema tentang deret yang berlaku secara umum untuk setiap deret. Harus diperhatikan bahwa teorema itu memberikan syarat cukup dan bukan syarat perlu. Teorema berikut ini untuk pengintegralan sering digunakan.

Teorema 10–2. Deret Fourier untuk $f(x)$ dapat diintegralan suku demi suku dari a ke x dan deret yang dihasilkan akan konvergen seragam ke $\int_a^x f(u)\, du$ asalkan $f(x)$ kontinu bagian demi bagian pada $-L < x < L$ dan a, x keduanya terletak pada selang ini.

NOTASI KOMPLEKS UNTUK DERET FOURIER

Dengan menggunakan kesamaan Euler,

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta, \quad e^{-i\theta} = \cos\theta - i\sin\theta \qquad \text{.............................(10-6)}$$

di sini $i = \sqrt{-1}$ deret Fourier untuk $f(x)$ dapat ditulis sebagai

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\pi x/L} \qquad \text{.........................(10-7)}$$

di mana $$c_n = \frac{1}{2L} \int_{-L}^{L} f(x)\, e^{-in\pi x/L}\, dx \qquad \text{...........................(10-8)}$$

Dalam menuliskan kesamaan (7), kita mengandaikan bahwa syarat Dirichlet berlaku dan selanjutnya $f(x)$ kontinu pada x. Jika $f(x)$ tak kontinu di x, ruas kiri (7) diganti

dengan $\dfrac{f(x+0) + f(x-0)}{2}$

10.7 FUNGSI TEGAKLURUS

Dua vektor A dan B dinamakan tegaklurus jika $\bar{A} \bullet \bar{B} = 0$ atau $A_1B_1 + A_2B_2 + A_3B_3 = 0$, di mana $\bar{A} = A_1\bar{i} + A_2\bar{j} + A_3\bar{k}$ dan $\bar{B} = B_1\bar{i} + B_2\bar{j} + B_3\bar{k}$. Walaupun secara ilmu ukur atau fisis jelas, gagasan ini dapat diperumum untuk vektor-vektor dengan lebih dari tiga komponen. Khususnya, kita dapat berpikir bahwa suatu fungsi, katakanlah A(x), dipandang sebagai suatu vektor dengan tak berhingga komponen (yaitu suatu vektor berdimensi tak berhingga); nilai dari setiap komponen ditentukan dengan menggantikan suatu nilai khusus x pada selang (a, b). Masuk akal bahwa dalam kasus ini didefinisikan dua fungsi A(x) dan B(x) saling tegaklurus pada (a, b) jika

$$\int_a^b A(x)\, B(x)\, dx = 0 \qquad \text{...........................(10-9)}$$

Suatu vektor A dinamakan suatu vektor satuan atau vektor yang dinormalkan jika panjangnya 1 satuan, yaitu jika $A \bullet A = A^2 = 1$. Perluasan konsep ini, kita mengatakan bahwa fungsi A(x) adalah normal atau dinormalkan pada (a, b), Jika

$$\int_a^b \{A(x)\}^2\, dx = 1 \qquad \text{..........................(10-10)}$$

Dari hal di atas, jelaslah bahwa kita dapat memandang suatu himpunan fungsi $\{\phi_k(x)\}$, k = 1, 2, 3, . . . yang besifat

$$\int_a^b \phi_m(x)\phi_n(x)\, dx = 0 \quad m \neq n \qquad \text{.........................(10-11)}$$

$$\int_a^b \{\phi_m(x)\}^2\, dx = 1 \qquad \text{.................(10-12)}$$

Dalam kasus ini, setiap anggota himpunan saling tegaklurus dengan setiap anggota lainnya di himpunan itu dan juga telah dinormalkan. Kita namakan himpunan fungsi yang demikian sebagai suatu himpunan ortonormal pada (a, b).

Persamaan (11) dan (12) dapat diringkaskan dengan menuliskan

$$\int_a^b \phi_m(x)\, \phi_n(x)\, dx = \delta_{mn} \qquad \text{.................(10-13)}$$

di sini δ_{mn}, dinamakan Lambang Kronecker dan didefinisikan bernilai 0 jika m ≠ n dan 1 jika m = n.

Seperti halnya dengan sembarang vektor r di ruang dimensi 3 dapat diuraikan dalam sekelompok vektor-vektor satuan yang saling tegaklurus i, j, k berbentuk $r = c_1\, i + c_2\, j + c_3\, k$, maka kita memandang kemungkinan penguraian suatu fungsi $f(x)$ dalam sekelompok fungsi-fungsi yang ortonormal, yaitu

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \phi_n(x) \qquad a \le x \le b \qquad \text{...................(10-14)}$$

Deret tersebut, yang dinamakan deret ortonormal, adalah perumuman dari deret Fourier dan sangat banyak kegunaannya baik secara teoretis maupun penerapannya.

$$\int_a^b w(x)\psi_m(x)\psi_n(x)dx = \delta_{mn} \qquad \text{.........................(10-15)}$$

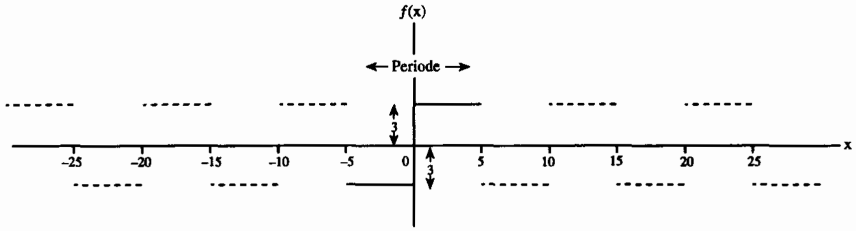
di sini $w(x) \ge 0$, kita seringkali mengatakan bahwa $\psi_m(x)$ dan $\psi_n(x)$ ortonormal terhadap fungsi kepadatan (density function) atau fungsi berbobot (weight function). Dalam kasus ini, himpunan fungsi $\{\sqrt{w(x)}\, \phi_n(x)\}$ adalah suatu himpunan ortonormal pada (a, b).

10.8. SOAL-SOAL LATIHAN DAN PENYELESAIANNYA

DERET FOURIER

10.1. Gambarkanlah setiap fungsi berikut.

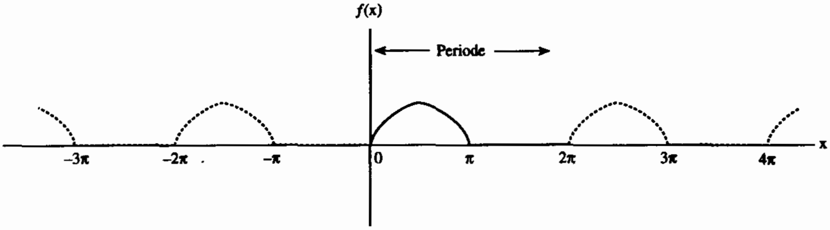
(a) $f(x) = \begin{cases} 3 & 0 < x < 5 \\ -3 & -5 < x < 0 \end{cases}$ Periode = 10



Gambar 10-2.

Karena periodenya 10, bagian grafik pada $-5 < x < 5$ (ditunjukkan dengaan garis tebal pada Gambar 10-2 di atas) diperluas secara periodik di luar jangkauan ini (ditunjukaan dengan garis terputus-putus). Perhatikanlah bahwa $f(x)$ tidak didefinisikan di x = 0,5, –5, 10, 15, –15 dan seterusnya. Titik-titik ini adalah titik ketakkontinuan $f(x)$.

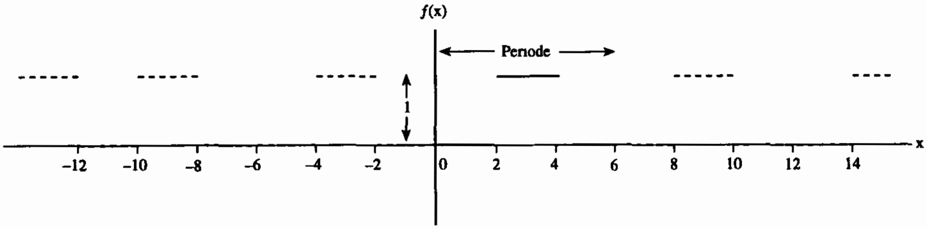
(b) $f(x) = \begin{cases} \sin x & 0 \leq x \leq \pi \\ 0 & \pi < x < 2\pi \end{cases}$ Periode = 2π



Gambar 10-3

Perhatikanlah Gambar 10-3 di atas, $f(x)$ didefinisikan untuk setiap x dan kontinu di mana-mana

(c) $f(x) = \begin{cases} 0 & 0 \leq x < 2 \\ 1 & 2 \leq x < 4 \\ 0 & 4 \leq x < 6 \end{cases}$ Periode = 6



Gambar 10-4

Perhatikanlah Gambar 10-4, $f(x)$ didefinisikan untuk setiap x dan tak kontinu di $x = \pm 2, \pm 4, \pm 8, \pm 10, \pm 14, \ldots$

10.2. Buktikanlah $\int_{-L}^{L} \sin \frac{k\pi x}{L}\, dx = \int_{-L}^{L} \frac{k\pi x}{L}\, dx = 0$ jika $k = 1, 2, 3, \ldots$

$$\int_{-L}^{L} \sin \frac{k\pi x}{L}\, dx = -\frac{L}{k\pi} \cos \frac{k\pi x}{L} \Big|_{-L}^{L} = -\frac{L}{k\pi} \cos k\pi + \frac{L}{k\pi} \cos(-k\pi) = 0$$

$$\int_{-L}^{L} \cos \frac{k\pi x}{L}\, dx = \frac{L}{k\pi} \sin \frac{k\pi x}{L} \Big|_{-L}^{L} = \frac{L}{k\pi} \sin k\pi - \frac{L}{k\pi} \sin(-k\pi) = 0$$

10.3. Buktikanlah

(a) $\int_{-L}^{L} \cos \frac{m\pi n}{L} \cos \frac{n\pi x}{L}\, dx = \int_{-L}^{L} \sin \frac{m\pi x}{L} \sin \frac{n\pi x}{L}\, dx = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ L & m = n \end{cases}$

(b) $\int_{-L}^{L} \sin \frac{m\pi x}{L} \cos \frac{n\pi x}{L}\, dx = 0$

di mana m dan n dapat diandaikan $1, 2, 3, \ldots$

(a) Dari trigonometri : $\cos A \cos B = \frac{1}{2}\{\cos(A - B) + \cos(A + B)\}$, $\sin A \sin B = \frac{1}{2}\{\cos(A - B) - \cos(A + B)\}$.

Jika $m \neq n$, maka menurut Soal 10.2.

$$\int_{-L}^{L} \cos \frac{m\pi x}{L} \cos \frac{n\pi x}{L}\, dx = \frac{1}{2} \int_{-L}^{L} \left\{\cos \frac{(m-n)\pi x}{L} + \cos \frac{(m+n)\pi x}{L}\right\} dx = 0$$

Dengan cara yang sama, jika $m \neq n$, maka

$$\int_{-L}^{L} \sin \frac{m\pi x}{L} \sin \frac{n\pi x}{L}\, dx = \frac{1}{2} \int_{-L}^{L} \left\{\cos \frac{(m-n)\pi x}{L} - \cos \frac{(m+n)\pi x}{L}\right\} dx = 0$$

Jika $m = n$, kita mempunyai

$$\int_{-L}^{L} \cos \frac{m\pi x}{L} \sin \frac{n\pi x}{L}\, dx = \frac{1}{2} \int_{-L}^{L} \left(1 + \cos \frac{2n\pi x}{L}\right) dx = L$$

$$\int_{-L}^{L} \sin \frac{m\pi x}{L} \sin \frac{n\pi x}{L}\, dx = \frac{1}{2} \int_{-L}^{L} \left(1 - \cos \frac{2n\pi x}{L}\right) dx = L$$

Perhatikanlah bahwa $m = n = 0$, maka integral ini berturut-turut sama dengan 2L dan 0.

(b) Diketahui $\sin A \cos B = \frac{1}{2}\{\sin(A - B) + \sin(A + B)\}$. Kemudian berdasarkan Soal 10.2, jika $m \neq n$, maka

$$\int_0^L \sin\frac{n\pi x}{L}\cos\frac{n\pi x}{L}\,dx = \frac{1}{2}\int_{-L}^{L}\left\{\sin\frac{(m-n)\pi x}{L} + \sin\frac{(m+n)\pi x}{L}\right\}dx = 0$$

Jika m = n, maka

$$\int_{-L}^{L} \sin\frac{M\pi x}{L}\cos\frac{n\pi x}{L}\,dx = \frac{1}{2}\int_{-L}^{L}\sin\frac{2n\pi x}{L}\,dx = 0$$

Hasil bagian (a) dan (b) berlaku juga sekalipun limit pengintegralan –L dan L berturut-turut diganti oleh c, c + 2L.

10.4. Jika deret $A + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{L} + b_n\sin\frac{n\pi x}{L}\right)$ konvergen seragam ke $f(x)$ pada (–L, L), tunjukkanlah bahwa untuk n = 1, 2, 3, . . .,

(a) $a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}\,dx$, (b) $b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}\,dx$, (c) $A = \frac{a_0}{2}$.

(a) Kalikan $f(x) = A + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{L} + b_n\sin\frac{n\pi x}{L}\right)$ ....(1)

dengan $\cos\frac{m\pi x}{L}$ dan integralkan dari –L sampai L, gunakanlah Soal 10.3, memperoleh

$$\int_{-L}^{L} f(x)\cos\frac{m\pi x}{L}\,dx = A\int_{-L}^{L}\cos\frac{m\pi x}{L}\,dx \qquad ....(2)$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\left\{a_n\int_{-L}^{L}\cos\frac{m\pi x}{L}\cos\frac{n\pi x}{L}\,dx + b_n\int_{-L}^{L}\cos\frac{m\pi x}{L}\sin\frac{n\pi x}{L}\,dx\right\}$$

$= a_mL$ jika $m \neq 0$

Jadi $\quad a_m = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\frac{m\pi x}{L}\,dx$ jika m = 1, 2, 3, . . .

(b) Kalikan (1) dengan $\sin\frac{m\pi x}{L}$ dan integralkan dari –L sampai L, gunakanlah Soal 10.3, kita memperoleh

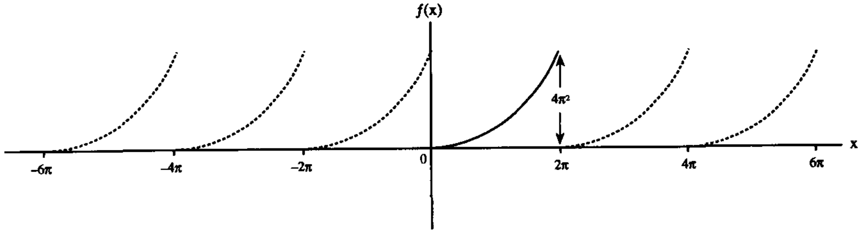
$$\int_{-L}^{L} f(x)\sin\frac{m\pi x}{L}\,dx = A\int_{-L}^{L}\sin\frac{m\pi x}{L}\,dx$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\left\{a_n\int_{-L}^{L}\sin\frac{m\pi x}{L}\cos\frac{n\pi x}{L}\,dx + b_n\int_{-L}^{L}\sin\frac{m\pi x}{L}\sin\frac{n\pi x}{L}\,dx\right\}$$

$= b_mL$

10.6. Uraikanlah $f(x) = x^2$, $0 < x < 2\pi$ dalam suatu deret Fourier jika (a) periodenya 2π, (b) periodenya tidak ditetapkan.

(a) Grafik $f(x)$ dengan periode 2π ditunjukkan pada Gambar 10-6 di bawah.



Gambar 10-6.

Periode $= 2L = 2\pi$ dan $L = \pi$. Pilihlah $c = 0$, kita mempunyai

$$a_n = \frac{1}{L}\int_c^{c+2L} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x^2 \cos nx\,dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\left\{(x^2)\left(\frac{\sin nx}{n}\right) - (2x)\left(\frac{-\cos nx}{n^2}\right) + 2\left(\frac{-\sin nx}{n^3}\right)\right\}\Big|_0^{2\pi} = \frac{4}{n^2},\ n \neq 0$$

Jika $n = 0$, $a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x^2\,dx = \frac{8\pi^2}{3}$

$$b_n = \frac{1}{L}\int_c^{c+2L} f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x^2 \sin nxdx$$

$$= \frac{1}{\pi}\left\{(x^2)\left(-\frac{\cos nx}{n}\right) - (2x)\left(-\frac{\sin nx}{n^2}\right) + (2)\left(\frac{\cos nx}{n^3}\right)\right\}\Big|_0^{2\pi} = \frac{-4\pi}{n}$$

Maka $f(x) = x^2 = \frac{4\pi^2}{3} + \sum_{0=1}^{\infty}\left(\frac{4}{n^2}\cos nx - \frac{4\pi}{n}\sin nx\right).$

Ini berlaku juga untuk $0 < x < 2\pi$. Di $x = 0$ dan $x + 2\pi$, deret konvergen ke $2\pi^2$.

(b) Jika periodenya tidak ditetapkan, secara umum deret Fourier tidak dapat ditentukan secara tunggal.

10.7. Gunakanlah hasil Soal 10-6 untuk membuktikan $\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots = \frac{\pi^2}{6}$.

Di $x = 0$ deret Fourier dari Soal 10.6 menjadi $\dfrac{4\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{4}{n^2}$

Menurut syarat Dirichlet, deret tersebut konvergen di $x = 0$ ke $\dfrac{1}{2}(0 + 4\pi^2) = 2\pi^2$

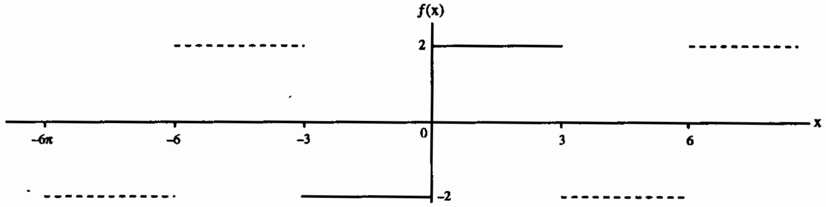
Jadi $\dfrac{4\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{4}{n^2} = 2\pi^2$, sehingga $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2} = \dfrac{\pi^2}{6}$

FUNGSI GANJIL DAN GENAP, DERET FOURIER SEPARUH JANGKAUAN

10.8. Kelompokkan setiap fungsi yang diberikan sesuai dengan apakah fungsi itu ganjil, genap atau tidak ganjil dan tidak genap.

(a) $f(x) = \begin{cases} 2 & 0 < x < 3 \\ -2 & -3 < x < 0 \end{cases}$ Periode $= 2\pi$

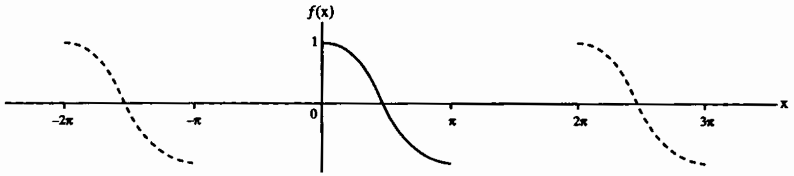
Dari Gambar 10.7 di bawah dapat dilihat bahwa fungsi tersebut tidak ganjil dan tidak genap.



Gambar 10-7

(b) $f(x) = \begin{cases} \cos x & 0 < x < \pi \\ 0 & \pi < x < 2\pi \end{cases}$ Periode $= 2\pi$

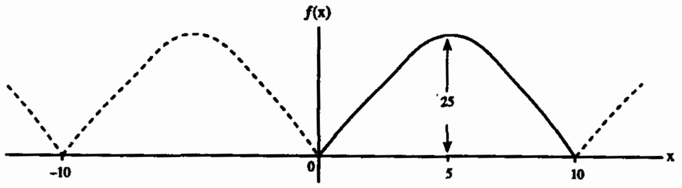
Dari Gambar 10-8 di bawah dapat dilihat bahwa fungsi tersebut tidak ganjil dan tidak genap.



Gambar 10-8

(c) $f(x) = x(10 - x), \quad 0 < x < 10, \quad \text{Periode} = 10$

Dari Gambar 10-9 di bawah dapat dilihat bahwa fungsi tersebut genap.



Gambar 10-9

10.9. Tunjukkanlah bahwa sebuah fungsi genap dalam uraian Fouriernya tidak mempunyai suku-suku sinus.

Metode 1.

Tidak terdapatnya suku-suku sinus terjadi jika $b_n = 0$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ Untuk menunjukkan ini, tulislah

$$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x) \sin\frac{n\pi x}{L}\, dx = \frac{1}{L}\int_{-L}^{0} f(x) \sin\frac{n\pi x}{L}\, dx + \frac{1}{L}\int_{0}^{L} f(x) \sin\frac{n\pi x}{L}\, dx \qquad \text{.........................(1)}$$

Jika dibuat transformasi $x = -u$ pada integral pertama di ruas kanan (1), maka diperoleh :

$$\frac{1}{L}\int_{-L}^{0} f(x) \sin\frac{n\pi x}{L}\, dx = \frac{1}{L}\int_{0}^{L} f(-u) \sin\left(-\frac{n\pi u}{L}\right) du = -\frac{1}{L}\int_{0}^{L} f(-u) \sin\frac{n\pi u}{L}\, du \qquad \text{............................(2)}$$

$$= -\frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(u) \sin\frac{n\pi u}{L}\, du = -\frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x) \sin\frac{n\pi x}{L}\, dx$$

di mana kita telah menggunakan kenyataan bahwa untuk suatu fungsi genap berlaku $f(-u) = f(u)$ dan pada langkah terakhir peubah pengintegralan u dapat diganti lambang lain, khususnya dengan x. Jadi dari (1), dengan menggunakan (2), kita memperoleh

$$b_n = -\frac{1}{L}\int_0^L f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}\,dx + \frac{1}{L}\int_0^L f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}\,dx = 0$$

Metode 2.

Andaikan $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos\frac{n\pi x}{L} - b_n \sin\frac{n\pi x}{L})$

Maka $\quad f(-x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos\frac{n\pi x}{L} - b_n \sin\frac{n\pi x}{L})$

Jika $f(x)$ genap, maka $f(-x) = f(x)$. Karena itu

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos\frac{n\pi x}{L} + b_n \sin\frac{n\pi x}{L}) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos\frac{n\pi x}{L} - b_n \sin\frac{n\pi x}{L})$$

dan juga $\quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{L} = 0$, yaitu $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{L}$

yang tidak mempunyai suku-suku sinus.

Dengan cara yang sama kita dapat menunjukkan bahwa uraian Fourier suatu fungsi ganjil tidak mempunyai suku-suku cosinus (atau suku konstan).

10.10 Jika $f(x)$ genap, tunjukkanlah bahwa (a) $a_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}\,dx$, (b) $b_n = 0$

(a) $\quad a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}\,dx = \frac{1}{L}\int_{-L}^{0} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}\,dx + \frac{1}{L}\int_0^L f(x)\frac{n\pi x}{L}\,dx$

Misalkan $x = -u$, maka

$$\frac{1}{L}\int_{-L}^{0} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}\,dx = \frac{1}{L}\int_0^L f(-u)\cos\left(\frac{-n\pi u}{L}\right)du = \frac{1}{L}\int_0^L f(u)\cos\frac{n\pi u}{L}\,du$$

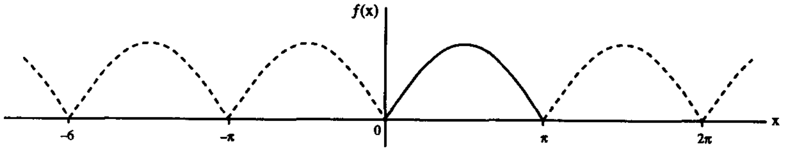
karena menurut definisi fungsi genap, $f(-u) = f(u)$. Jadi

$$a_n = \frac{1}{L}\int_0^L f(u)\cos\frac{n\pi u}{L}\,du + \frac{1}{L}\int_0^L f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}\,dx = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}\,dx$$

(b) Langsung diperoleh dengan Metode 1 Soal 10.9.

10.11. Uraikanlah $f(x) = \sin x$, $0 < x < \pi$ dalam suatu deret Fourier cosinus.

Suatu deret Fourier yang terdiri dari suku-suku cosinus saja berlaku hanya untuk fungsi genap. Karena itu kita memperluas definisi $f(x)$ sehingga menjadi fungsi genap (bagian bergaris pada Gambar 10-10 di bawah). Dengan perluasan ini, $f(x)$ kita definisikan pada selang yang panjangnya 2π. Ambillah periodenya 2π, kita memperoleh $2L = 2\pi$, sehingga $L = \pi$.



Gambar 10-10

Menurut Soal 10-10, $b_n = 0$ dan

$$a_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin x\cos nx\,dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\{\sin(x+nx)+\sin(x-nx)\}\,dx = \frac{1}{\pi}\left\{-\frac{\cos(n+1)x}{n+1}+\frac{\cos(n-1)x}{n-1}\right\}\Big|_0^{\pi}$$

$$= \frac{1}{\pi}\left\{\frac{1-\cos(n+1)\pi}{n+1}+\frac{\cos(n-1)\pi-1}{n-1}\right\} = \frac{1}{\pi}\left\{-\frac{1+\cos n\pi}{n+1}-\frac{1+\cos n\pi}{n-1}\right\}$$

$$= \frac{-2(1+\cos n\pi)}{\pi(n^2-1)} \quad \text{jika } n \neq 1$$

Untuk $n = 1$, $\quad a_1 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin x\cos x\,dx = \frac{2}{\pi}\,\frac{\sin^2 x}{2}\Big|_0^{\pi} = 0$

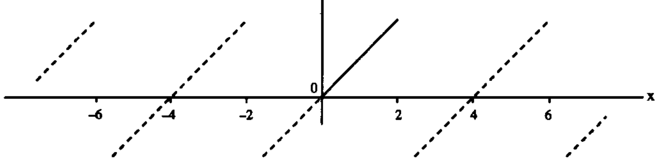
Untuk $n = 0$, $\quad a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin x\,dx = \frac{2}{\pi}(-\cos x)\Big|_0^{\pi} = \frac{4}{\pi}$

Maka $\quad f(x) = \frac{2}{\pi} - \frac{2}{\pi}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(1+\cos n\pi)}{n^2-1}\cos nx$

$$= \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\left(\frac{\cos 2x}{2^2-1}+\frac{\cos 4x}{4^2-1}+\frac{\cos 6x}{6^2-1}+\ldots\right)$$

10.12. Uraikanlah $f(x) = x$, $0 < x < 2$ dalam separuh jangkauan (a) deret sinus, (b) deret cosinus,

(a) Perluas difinisi fungsi yang diberikan sehingga menjadi fungsi ganjil dengan periode 4 seperti di tunjukkan pada Gambar 10-11 di bawah. Perluasan ini kadang-kadang dinamakan perluasan ganjil untuk $f(x)$. Maka $2L = 4$, $L = 2$.



Gambar 10-11

Jadi $a_n = 0$ dan

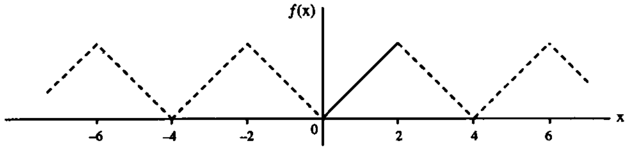
$$b_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}\,dx = \frac{2}{2}\int_0^2 x\sin\frac{n\pi x}{2}\,dx$$

$$= \left\{(x)\left(\frac{-2}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{2}\right) - (1)\left(\frac{-4}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi x}{2}\right)\right\}\Big|_0^2 = \frac{-4}{n\pi}\cos n\pi$$

sehingga $$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{-4}{n\pi}\cos n\pi\sin\frac{n\pi x}{2}$$

$$= \frac{4}{\pi}\left(\sin\frac{n\pi}{2} - \frac{1}{2}\sin\frac{2\pi x}{2} + \frac{1}{3}\sin\frac{3\pi x}{2} - \dots\right)$$

(c) Perluas definisi $f(x)$ sehingga menjadi fungsi genap dengan periode 4 seperti ditunjukkan pada Gambar 10-12 di bawah. Perluasan ini dinamakan perluasan genap untuk $f(x)$. Maka $2L = 4$, $L = 2$.



Gambar 10-12

Jadi $b_n = 0$

$$a_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}\,dx = \frac{2}{2}\int_0^2 x\cos\frac{n\pi x}{2}\,dx$$

$$= \left\{(x)\left(\frac{2}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{2}\right) - (1)\left(\frac{-4}{n^2\pi^2}\cos\frac{n\pi x}{2}\right)\right\}\Big|_0^2$$

$$= \frac{4}{n^2\pi^2}(\cos n\pi - 1) \text{ jika } n \neq 0$$

Jika n = 0, $a_0 = \int_0^2 x\, dx = 2.$

Maka $f(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2\pi^2} (\cos n\pi - 1) \cos \frac{n\pi x}{2}$

$$= 1 - \frac{8}{\pi^2}\left(\cos \frac{\pi x}{2} + \frac{1}{3^2} \cos \frac{3\pi x}{2} + \frac{1}{5^2} \cos \frac{5\pi x}{2} + \ldots\right)$$

Perhatikanlah bahwa fungsi yang diketahui, $f(x) = x$, $0 < x < 2$, dinyatakan sama baiknya dengan dua deret yang berbeda dalam (a) dan (b).

KESAMAAN PARSEVAL

10.13. Andaikan deret Fourier yang berkaitan dengan $f(x)$ konvergen seragam ke $f(x)$ pada selang (–L, L), buktikanlah kesamaan parseval

$$\frac{1}{L} \int_{-L}^{L} \{f(x)\}^2\, dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum (a_n^2 + b_n^2)$$

di mana integralnya diandaikan ada.

Jika $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \sin \frac{n\pi x}{L})$, maka dengan mengalikan

dengan $f(x)$ dan mengintegralkannya suku demi suku dari –L sampai L (yang dimungkinkan karena deret ini konvergen seragam) kita memperoleh

$$\int_{-L}^{L} \{f(x)\}^2 dx = \frac{a_0}{2} \int_{-L}^{L} f(x)dx + \sum_{n=1}^{\infty}\{a_n \int_{-L}^{L} f(x) \cos\frac{n\pi x}{L}dx + b_n \int_{-L}^{L} f(x) \sin\frac{n\pi x}{L}dx\}$$

$$= \frac{a_0^2}{2} L + L \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) \qquad \text{.........................(1)}$$

di mana telah digunakan hasil

$$\int_{-L}^{L} f(x) \cos\frac{n\pi x}{L}dx = La_n, \int_{-L}^{L} f(x) \sin\frac{n\pi x}{1}dx = Lb_n, \int_{-L}^{L} f(x)\, dx = La_0 \text{ ....(2)}$$

yang diperoleh dari koefisien Fouriernya.

Hasil yang diinginkan diperoleh langsung dengan membagi kedua ruas (1) dengan L. Kesamaan Parseval berlaku dengan syarat yang lebih terbatas daripada yang ditetapkan di sini.

10.14. (a) Tulislah kesamaan Parseval yang bersesuaian dengan deret Fourier pada Soal 10.12(b).

(b) Dari (a), tentukanlah jumlah S untuk deret $\frac{1}{1^4} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \ldots + \frac{1}{n^4} + \ldots$

(a) Di sini $L = 2$, $a_0 = 2$, $a_n = \frac{4}{n^2\pi^2}(\cos n\pi - 1)$, $n \neq 0$, $b_n = 0$

Maka kesamaan Parsevalnya menjadi

$$\frac{1}{2}\int_{-2}^{2} \{f(x)\}^2 dx = \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} x^2\, dx = \frac{(2)^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{16}{n^4\pi^4}(\cos n\pi - 1)^2$$

atau $\frac{8}{3} = 2 + \frac{64}{\pi^4}\left(\frac{1}{1^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} + \ldots\right)$, yaitu $\frac{1}{1^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} + \ldots = \frac{\pi^4}{96}$

(b) $S = \frac{1}{1^4} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \ldots = \left(\frac{1}{1^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} + \ldots\right) + \left(\frac{1}{2^4} + \frac{1}{4^4} + \frac{1}{6^4} + \ldots\right)$

$$= \left(\frac{1}{1^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} + \ldots\right) + \frac{1}{2^4}\left(\frac{1}{1^4} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \ldots\right)$$

$$= \frac{\pi^4}{96} + \frac{S}{16}, \text{ sehingga } S = \frac{\pi^4}{90}$$

10.15. Buktikanlah bahwa untuk setiap bilangan bulat positif M.

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{M} (a_n^2 + b_n^2) \leq \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} \{f(x)\}^2\, dx$$

di sini a_n dan b_n adalah koefisien Fourier yang bersesuaian dengan $f(x)$, dan $f(x)$ di andaikan kontinu bagian demi bagian pada (–L, L).

Misalkan $S_M(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{M}\left(a_n \cos\frac{n\pi x}{L} + b_n \sin\frac{n\pi x}{L}\right)$ ....(1)

Untuk M = 1, 2, 3, . . ., ini merupakan barisan jumlah parsial deret Fourier yang bersesuaian dengan $f(x)$.

Kita mempunyai $\int_{-L}^{L}\{f(x) - S_M(x)\}^2\, dx \geq 0$ ....(2)

karena integran tak negatif. Uraikan integran ini, kita memperoleh

$$2\int_{-L}^{L} f(x)\, S_M(x)\, dx - \int_{-L}^{L} S_M^2(x)\, dx \le \int_{-L}^{L} \{f(x)\}^2\, dx \qquad \text{.......................(3)}$$

Kalikan kedua ruas (1) dengan $2f(x)$ dan integrasi dari $-L$ sampai L, gunakan persamaan (2) pada Soal 10.13; hasilnya adalah:

$$2\int_{-L}^{L} S_M^2(x)\, dx = L\left\{\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{M} (a_n^2 + b_n^2)\right\} \qquad \text{.......................(4)}$$

Juga, kuadratkan (1) dan integrasikan dari $-L$ sampai L, gunakan Soal 10.3; kita memperoleh

$$\int_{-L}^{L} S_M^2(x)\, dx = L\left\{\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{M} (a_n^2 + b_n^2)\right\} \qquad \text{.......................(5)}$$

Substitusikanlah (4) dan (5) ke dalam (3) dan bagilah dengan L untuk memperoleh hasil yang diinginkan.
Ambil limitnya untuk $M \to \infty$, kita memperoleh ketaksamaan Bessel

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) \le \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} \{f(x)\}^2\, dx \qquad \text{.......................(6)}$$

Jika tanda sama yang berlaku, kita memperoleh kesamaan Parseval (Soal 10.13).

Kita dapat berpikir bahwa $S_M(x)$ seperti menyatakan suatu pendekatan untuk $f(x)$, sedangkan ruas kiri (2) setelah membaginya dengan 2L menyatakan kesalahan rata-rata kuadrat dari pendekatan ini. Kesamaan Parseval menunjukkan bahwa untuk $M \to \infty$, kesalahan rata-rata kuadratnya mendekati nol, sedangkan ketaksamaan Bessel menyatakan kemungkinan bahwa kesalahan rata-rata kuadrat ini tidak mendekati nol.

Hasil tersebut dihubungkan dengan gagasan dari kelengkapan (completeness) suatu himpunan ortonormal. Sebagai contoh, jika dihilangkan satu atau lebih suku pada suatu deret Fourier (misalnya $\cos 4\pi x/L$), maka tidak pernah dapat dibuat kesalahan rata-rata kuadratnya mendekati nol bagaimanapun juga banyaknya suku yang diambil. Untuk kemiripannya dengan vektor-vektor di ruang dimensi tiga, lihat Soal 10.46.

DIFFERENSIAL DAN PENGINTEGRALAN DERET FOURIER

10.16. Tentukanlah suatu deret Fourier untuk $f(x) = x^2$, $0 < x < 2$, dengan mengintegral kan deret pada Soal 10.12(a)

(b) Gunakanlah (a) untuk menghitung deret $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$

(a) Dari Soal 10.12(a),

$$x = \frac{4}{\pi}\left(\sin\frac{\pi x}{2} - \frac{1}{2}\sin\frac{2\pi x}{2} + \frac{1}{3}\sin\frac{3\pi x}{2} - \ldots\right) \quad\text{.............. (1)}$$

Integralkan kedua ruas dari 0 sampai x (gunakanlah Teorema 10.2 dan kalikan dengan 2, kita memperoleh

$$x^2 = C - \frac{16}{\pi^2}\left(\cos\frac{\pi x}{2} - \frac{1}{2^2}\cos\frac{2\pi x}{2} + \frac{1}{3^2}\cos\frac{3\pi x}{2} - \ldots\right) \quad\text{............(2)}$$

$$\text{di sini } C = \frac{16}{\pi^2}\left(1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \ldots\right).$$

(b) Untuk menentukan C dengan cara lain, perhatikanlah bahwa (2) menyatakan deret Fourier cosinus untuk x^2 pada $0 < x < 2$. Kemudian, karena pada kasus ini $L = 2$, maka

$$C = \frac{a_0}{2} = \frac{1}{L}\int_0^L f(x)\,dx = \frac{1}{2}\int_0^2 x^2\,dx = \frac{4}{3}$$

Kemudian dari nilai C pada (a), kita memperoleh

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \ldots = \frac{\pi^2}{16}\bullet\frac{4}{3} = \frac{\pi^2}{12}$$

10.17. Tunjukanlah bahwa pendifferensialan suku demi suku deret pada Soal 10.12(a) tidak berlaku.

Pendifferensialan suku demi suku memberikan $2(\cos\frac{\pi x}{2} - \cos\frac{2\pi x}{2} + \cos\frac{3\pi x}{2} - \ldots)$

Karena suku ke-n deret ini tidak mendekati nol, maka deretnya tak konvergen untuk suatu nilai x.

KEKONVERGENAN DERET FOURIER

10.18. Buktikanlah bahwa

(a) $$\frac{1}{2} + \cos t + \cos 2t + \ldots + \cos Mt = \frac{\sin (M = {}^1/_2)t}{2\sin {}^1/_2\, t}$$

(b) $$\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\sin (M + {}^1/_2)t}{2\sin {}^1/_2\, t}\,dt = \frac{1}{2}, \qquad \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}\frac{\sin(M + {}^1/_2)t}{2\sin {}^1/_2 t}\,dt = \frac{1}{2}$$

(a) Diketahui $\cos nt \sin \frac{1}{2} t = \frac{1}{2} \{\sin(n + \frac{1}{2})t - \sin (n - \frac{1}{2})t\}$

Jumlahkan dari n = 1 sampai M, maka

$$\sin \tfrac{1}{2} t(\cos t + \cos 2t + \ldots + \cos Mt\} = (\sin \tfrac{3}{2}t - \sin \tfrac{1}{2}t) + (\sin \tfrac{5}{2}t - \sin^3{}_2 t)$$
$$+ \ldots + (\sin (M + \tfrac{1}{2})t - \sin (M - \tfrac{1}{2})t)$$
$$= \tfrac{1}{2} \{\sin (M + \tfrac{1}{2})t - \sin \tfrac{1}{2} t\}$$

Bagilah dengan $\sin \frac{1}{2}t$ dan tambah $\frac{1}{2}$, hasil yang diinginkan tercapai.

(b) Integralkan hasil pada (a) berturut-turut dari $-\pi$ sampai 0 dan dari 0 sampai π. Ini memberikan hasil yang diinginkan, karena integral dari semua suku cosinusnya adalah nol.

10.19. Buktikanlah bahwa $\lim\limits_{n\to 0} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx\, dx = \lim\limits_{n\to 0} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx\, dx = 0$ jika

$f(x)$ kontinu bagian demi bagian

Ini langsung diperoleh dari Soal 10.15., karena jika deret $\dfrac{a^2_0}{2} + \sum\limits_{n=1}^{\infty} (a^2_n + b^2_n)$ konvergen, maka $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$.

Hasil ini kadang-kadang dinamakan Teorema Riemann.

10.20. Buktikanlah bahwa $\lim\limits_{M\to\infty} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin (M+\frac{1}{2})x\, dx = 0$. Kontinu bagian demi bagian.

Diketahui:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin (M+\tfrac{1}{2})x\, dx = \int_{-\pi}^{\pi} \{f(x) \sin \tfrac{1}{2}x\}\cos Mx\, dx + \int_{-\pi}^{\pi} \{f(x) \cos \tfrac{1}{2}x\}\sin Mx\, dx$$

Maka hasil yang diinginkan langsung diperoleh dengan menggunakan hasil Soal 10.19 dengan $f(x)$ berturut-turut diganti oleh $f(x) \sin \frac{1}{2}x$ dan $f(x) \cos \frac{1}{2}x$ yang juga kontinu bagian demi bagian jika $f(x)$ ada.

Hasil tersebut juga dibuktikan bilamana limit pengintegralannya a dan b diganti dengan $-\pi$ dan π.

10.21. Andaikan bahwa $L = \pi$, yaitu bahwa deret Fourier yang bersesuaian dengan $f(x)$ mempunyai periode $2L = 2\pi$, tunjukkanlah bahwa

$$SM(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{M} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t + x) \frac{\sin (M + \frac{1}{2})t}{2 \sin \frac{1}{2}t} dt$$

Gunakanlah rumus untuk koefisien Fourier dengan L = n , kita memperoleh

$$a_n \cos nx + b_n \sin nx = \left(\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(u) \cos nu\, du\right) \cos nx +$$

$$\left(\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(u) \sin nu\, du\right) \sin nx$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(u)\,(\cos nu \cos nx + \sin nu \sin nx)\, du$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(u) \cos n(u - x)\, du$$

Juga,
$$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(u)\, du$$

Maka
$$S_M(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{M} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(u)\, du + \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{M}\int_{-\pi}^{\pi} f(u) \cos n(u - x)\, du$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(u) \left\{\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{M} \cos n(u - x)\right\} du$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(u)\, \frac{\sin (M + {}^1/_2)(u - x)}{2 \sin {}^1/_2 (u - x)}\, du$$

dengan menggunakan Soal 10.18. Misalkan $u - x = t$, kita memperoleh

$$S_M(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi - x}^{\pi - x} f(t + x)\, \frac{\sin (M + {}^1/_2)t}{2 \sin {}^1/_2 t}\, dt$$

Karena integran mempunyai periode 2π, kita dapat mengganti selang $-\pi - x$, $\pi - x$ dengan selang lainnya dengan panjang 2π, khususnya $(-y, y)$. Jadi kita memperoleh hasil yang diinginkan.

10.22. Buktikanlah bahwa

$$S_M(x) - \left(\frac{f(x + 0) + f(x - 0)}{2}\right) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} \left(\frac{f(t + x) - f(x - 0)}{2 \sin {}^1/_2 t}\right) \sin (M + {}^1/_2)t\, dt$$

$$+ \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} \left(\frac{f(t + x) - f(x + 0)}{2 \sin {}^1/_2 t}\right) \sin (M + {}^1/_2)t\, dt$$

Dari Soal 10.21,

$$S_M(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} f(t + x)\,\frac{\sin (M + {}^1/_2)t}{2 \sin {}^1/_2 t}\,dt + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(t + x)\,\frac{\sin (M + {}^1/_2)t}{2 \sin {}^1/_2 t}\,dt \quad ...(1)$$

Kalikan integral Soal 10.18.(b) berturut-turut dengan $f(x - 0)$ dan $f(x + 0)$

$$\frac{f(x + 0) + f(x - 0)}{2} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} f(x - 0)\,\frac{\sin (M + {}^1/_2)t}{2 \sin {}^1/_2 t}\,dt + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x + 0)$$

$$\frac{\sin (M + {}^1/_2)t}{2 \sin {}^1/_2 t}\,dt \quad ....(2)$$

Selisih (2) dengan (1) memberikan hasil yang diinginkan.

10.23. Jika $f(x)$ dan $f'(x)$ kontinu bagian demi bagian pada $(-\pi, \pi)$, buktikanlah bahwa

$$\lim_{M\to\infty} S_M(x) = \frac{f(x + 0) + f(x - 0)}{2}$$

Fungsi $\dfrac{f(t+ x) - f(x + 0)}{2 \sin {}^1/_2 t}$ kontinu bagian demi bagian pada $0 < t < \pi$ karena $f(x)$ kontinu bagian.

Juga,

$$\lim_{t\to0+} \frac{f(t + x) - f(x + 0)}{2 \sin {}^1/_2 t} = \lim_{t\to0+} \frac{f(t + x) - f(x + 0)}{t} \bullet \frac{t}{2 \sin {}^1/_2 t} =$$

$$\lim_{t\to0} \frac{f(t + x) - f(x + 0)}{t}$$

ada, karena menurut hipotesa $f'(x)$ kontinu bagian demi bagian sehingga turunan kanan $f(x)$ ada di setiap x.

Jadi $\dfrac{f(t + x) - f(x - 0)}{2 \sin {}^1/_2 t}$ kontinu bagian demi bagian pada $0 \le t \le \pi$.

Dengan cara yang sama, $\dfrac{f(t + x) - f(x - 0)}{2 \sin {}^1/_2 t}$ kontinu bagian demi bagian pada $-\pi \le t \le 0$

Kemudian dari Soal 10.20 dan 10.22 kita memperoleh

$$\lim_{M\to\infty} S_M(x) - \left\{\frac{f(x + 0) + f(x - 0)}{2}\right\} = 0 \text{ atau } \lim_{M\to\infty} S_M(x) = \frac{f(x + 0) + f(x - 0)}{2}$$

FUNGSI TEGAKLURUS

10.24. (a) Tunjukkanlah bahwa himpunan fungsi-fungsi

$$1,\ \sin\frac{\pi x}{L},\ \cos\frac{\pi x}{L},\ \sin\frac{2\pi x}{L},\ \cos\frac{2\pi x}{L},\ \sin\frac{3\pi x}{L},\ \cos\frac{3\pi x}{L},\ \ldots$$

membentuk suatu himpunan tegaklurus pada selang (–L, L).

(b) Tentukanlah konstanta dinormalkan yang bersesuaian dengan himpunan pada (a) sehingga himpunan tersebut ortonormal pada (–L, L).

(a) Ini diperoleh langsung dari hasil Soal 10.2 dan 10.3.

(b) Menurut Soal 10.3,

$$\int_{-L}^{L} \sin^2 \frac{m\pi x}{L}\, dx + L, \qquad \int_{-L}^{L} \cos^2 \frac{m\pi x}{L}\, dx = L$$

Maka, $$\int_{-L}^{L} \left(\sqrt{\frac{1}{L}} \sin \frac{m\pi x}{L}\right)^2 dx = 1, \quad \int_{-L}^{L} \left(\sqrt{\frac{1}{L}} \cos \frac{m\pi x}{L}\right)^2 dx = 1$$

Juga, $$\int_{-L}^{L} (1)^2\, dx + 2L \text{ atau } \int_{-L}^{L} \left(\frac{1}{\sqrt{2L}}\right)^2 dx = 1$$

Jadi himpunan ortonormal yang diinginkan adalah

$$\frac{1}{\sqrt{2L}},\ \frac{1}{\sqrt{L}} \sin\frac{\pi x}{L},\ \frac{1}{\sqrt{L}} \cos\frac{\pi x}{L},\ \frac{1}{\sqrt{L}} \sin\frac{2\pi x}{L},\ \frac{1}{\sqrt{L}} \cos\frac{2\pi x}{L},\ \ldots$$

10.25. Misalkan $\{\phi_n(x)\}$ adalah suatu himpunan fungsi yang saling ortonormal pada (a,b).

Buktikanlah bahwa jika $\sum_{n=1}^{\infty} c_n \phi_n(x)$ konvergen seragam ke $f(x)$ pada (a, b), maka

$$c_n = \int_a^b f(x)\, \phi_n(x)\, dx$$

Kalikan kedua ruas

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \phi_n(x) \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

dengan $\phi_m(x)$ dan integralkan dari a sampai b, kita memperoleh

$$\int_a^b f(x)\, \phi_m(x)\, dx = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \int_a^b \phi_m(x)\, \phi_n(x)\, dx \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

di mana pertukaran pengintegralan dan penjumlahan dimungkinkan dengan menggunakan kenyataan bahwa deret tersebut konvergen seragam ke $f(x)$. Sekarang karena fungsi-fungsi $\{\phi_n(x)\}$ saling ortonormal pada (a, b), maka kita memperoleh

$$\int_a^b \phi_m(x)\, \phi_n(x)\, dx = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ 1 & m = n \end{cases}$$

sehingga (2) menjadi

$$\int_a^b f(x)\, \phi_m(x)\, dx = c_m \qquad \text{.....................(3)}$$

seperti yang diinginkan.

Kita namakan koefisien c_m pada (3) sebagai koefisien Fourier yang diperumum ke $f(x)$ walaupun mungkin tidak ada yang diketahui tentang kekonvergenan deret (1). Seperti pada kasus deret Fourier, kekonvergenan $\sum_{n=1}^{\infty} c_n \phi_n(x)$ kemudian ditentukan dari koefisien (3). Syarat untuk kekonvergenan tersebut tentunya bergantung pada fungsi-fungsi ortonormal yang digunakan.

10.9. SOAL-SOAL LATIHAN

DERET FOURIER

10.26. Gambarkanlah setiap fungsi berikut dan tentukan deret Fourier yang berkaitan dengan menggunakan sifat fungsi ganjil dan genap yang digunakan.

(a) $f(x) = \begin{cases} 8 & 0 < x < 2 \\ -8 & 2 < x < 4 \end{cases}$ Periode 4 (b) $f(x) = \begin{cases} -x & -4 \leq x \leq 0 \\ x & 0 \leq x \leq 4 \end{cases}$ Periode 8

(c) $f(x) = 4x$, $0 < x < 10$, Periode 10 (d) $f(x) = \begin{cases} 2x & 0 \leq x < 3 \\ 0 & -3 < x < 0 \end{cases}$ Periode 6

10.27. Pada setiap bagian dari Soal 10.26., jelaskanlah di mana letak ketakkontinuan $f(x)$ dan untuk nilai manakah deretnya konvergen di titik ketakkontinuan ini.

10.28. Uraikanlah $f(x) = \begin{cases} 2 - x & 0 < x < 4 \\ x - 6 & 4 < x < 8 \end{cases}$ menjadi suatu deret Fourier dengan periode 8

10.29. (a) Uraikanlah $f(x) = \cos x$, $0 < x < \pi$, dalam suatu deret Fourier sinus.
(b) Bagaimanakah mendefinisikan $f(x)$ di $x = 0$ dan $x = \pi$ agar deret tersebut konvergen ke $f(x)$ untuk $0 \leq x < \pi$?

10.30. (a) Uraikanlah $f(x) = \cos x$, $0 < x < \pi$ dalam suatu deret Fourier jika periodenya π; dan (b) bandingkanlah dengan hasil Soal 10.29 kemudian jelaskanlah per samaan dan perbedaannya, jika ada.

10.31. Uraikanlah $f(x) = \begin{cases} x & 0 < x < 4 \\ 8 - x & 4 < x < 8 \end{cases}$ dalam suatu deret (a) sinus, (b) cosinus.

10.32. Buktikanlah bahwa untuk $0 \leq x \leq \pi$,

(a) $x(\pi - x) = \dfrac{\pi^2}{6} - \left(\dfrac{\cos 2x}{1^2} + \dfrac{\cos 4x}{2^2} + \dfrac{\cos 6x}{3^2} + \ldots\right)$

(b) $x(\pi - x) = \dfrac{8}{\pi}\left(\dfrac{\sin x}{1^3} + \dfrac{\sin 3x}{3^3} + \dfrac{\sin 5x}{5^3} + \ldots\right)$

10.33. Gunakanlah Soal 10.32 untuk menunjukkan bahwa

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2} = \dfrac{\pi^2}{6}$, (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n-1}}{n^2} = \dfrac{\pi^2}{12}$, (c) $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^3} = \dfrac{\pi^3}{32}$

10.34. Tunjukkanlah bahwa $\dfrac{1}{1^3} + \dfrac{1}{3^3} - \dfrac{1}{5^3} - \dfrac{1}{7^3} + \dfrac{1}{9^3} + \dfrac{1}{11^3} - \ldots = \dfrac{3\pi^3\sqrt{2}}{128}$

PENDIFFERENSIALAN DAN PENGINTEGRALAN DERET FOURIER

10.35. (a) Tunjukkanlah bahwa untuk $-\pi < x < \pi$,

$$x = 2\left(\frac{\sin x}{1} - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \ldots\right)$$

(b) Dengan mengintegralkan hasil (a), tunjukkanlah bahwa untuk $-\pi \leq x \leq \pi$,

$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} - 4\left(\frac{\cos x}{1^2} - \frac{\cos 2x}{2^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} - \ldots\right)$$

(c) Dengan mengintegralkan hasil (b), tunjukkanlah bahwa untuk $-\pi \leq x \leq \pi$,

$$x(\pi - x)(\pi + x) = 12\left(\frac{\sin x}{1^3} - \frac{\sin 2x}{2^3} + \frac{\sin 3x}{3^3} - \ldots\right)$$

10.36. (a) Tunjukkanlah bahwa untuk $-\pi < x < \pi$,

$$x \cos x = -\frac{1}{2}\sin x + 2\left(\frac{2}{1\cdot 3}\sin 2x - \frac{3}{2\cdot 4}\sin 3x + \frac{4}{3\cdot 5}\sin 4x - \ldots\right)$$

(b) Gunakanlah (a) untuk menunjukkan bahwa untuk $-\pi \leq x \leq \pi$,

$$x \sin x = 1 - \frac{1}{2}\cos x - 2\left(\frac{\cos 2x}{1\cdot 3} - \frac{\cos 3x}{2\cdot 4} + \frac{\cos 4x}{3\cdot 5} - \ldots\right)$$

10.37. Dengan mendifferensialkan hasil Soal 10.32(a), buktikanlah bahwa untuk $0 \le x \le \pi$,

$$x = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\left(\frac{\cos x}{1^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \ldots\right)$$

KESAMAAN PARSEVAL

10.38. Dengan menggunakan Soal 10.32 dan kesamaan Parseval, tunjukkanlah bahwa

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$ (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^6} = \frac{\pi^6}{945}$

10.39. Tunjukkanlah bahwa $\frac{1}{1^2 \bullet 3^2} + \frac{1}{3^2 \bullet 5^2} + \frac{1}{5^2 \bullet 7^2} + \ldots = \frac{\pi^2 - 8}{16}$

[Petunjuk : Gunakanlah Soal 10.11]

10.40. Tunjukkanlah bahwa (a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^4} = \frac{\pi^4}{96}$, (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^6} = \frac{\pi^6}{960}$.

10.41. Tunjukkanlah bahwa $\frac{1}{1^2 \bullet 2^2 \bullet 3^2} + \frac{1}{2^2 \bullet 3^2 \bullet 4^2} + \frac{1}{3^2 \bullet 4^2 \bullet 5^2} + \ldots = \frac{4\pi^2 - 39}{16}$.

FUNGSI TEGAKLURUS

10.42. Diketahui fungsi a_0, $a_1 + a_2x$, $a_3 + a_4x + a_5x^2$ di mana $a_0, \ldots, a_5$ konstanta. Tentukanlah konstanta tersebut agar fungsi-fungsi ini saling ortonormal pada $(-1, 1)$ dan kemudian fungsinya.

10.43. Perumum Soal 10.42.

10.44. (a) Tunjukkanlah bahwa fungsi-fungsi $\frac{e^{im\phi}}{\sqrt{2\pi}}$, $m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ saling ortonormal pada $(-\pi, \pi)$. (b) Tunjukkanlah bagaimana menguraikan sebuah fungsi $f(x)$ dalam sebuah deret dari fungsi-fungsi ini dan jelaskanlah hubungannya dengan deret Fourier.

10.45. Misalkan $f(x)$ didekati oleh jumlah M suku pertama sebuah deret ortonormal

$$\sum_{n=1}^{M} c_n \phi_n(x) = S_M(x)$$

di mana fungsi $\phi_n(x)$ ortonormal pada (a, b). (a) Tunjukkanlah bahwa

$$\int_a^b [f(x) - S_M(x)]^2\, dx = \int_a^b [f(x)^2\, dx - \sum_{n=1}^{M} c_n^2$$

(b) Dengan menafsirkan

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b [f(x) - S_M(x)]^2\, dx$$

sebagai kesalahan rata-rata kuadrat $S_M(x)$ dari $f(x)$ [dan akar kuadratnya dinamakan akar rata-rata kuadrat/root mean square atau kesalahan r.m.s.], tunjukkanlah bahwa kesamaan Parseval ekivalen dengan pernyataan bahwa kesalahan akar rata-rata kuadratnya mendekati nol untuk $M \to \infty$.

(c) Tunjukkanlah bahwa jika kesalahan akar rata-rata kuadrat tidak mungkin mendekati nol untuk $M \to \infty$, maka kita tetap memperoleh ketaksamaan Bessel.

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n^2 \leq \int_a^b [f(x)]^2\, dx$$

(d) Bahaslah kaitan hasil ini dengan deret Fourier.

10.46. Misalkan r suatu vektor tiga dimensi. Tunjukkanlah bahwa

(a) $(\mathbf{r} \bullet \mathbf{i})^2 + (\mathbf{r} \bullet \mathbf{j})^2 \leq r^2$ (b) $(\mathbf{r} \bullet \mathbf{i})^2 + (\mathbf{r} \bullet \mathbf{j})^2 + (\mathbf{r} \bullet \mathbf{k})^2 = r^2$

dan bahaslah ini bersesuaian dengan ketaksamaan Bessel dan kesamaan Parseval-Bandingkanlah dengan Soal 10.15.

10.47. Andaikan bahwa satu suku dari sembarang deret ortonormal [seperti deret Fourier] dihilangkan. (a) Dapatkah diuraikan suatu fungsi $f(x)$ ke dalam deret ini? (b) Dapatkah kesamaan Parseval berlaku? (c) Dapatkah ketaksamaan Bessel berlaku? Beri alasan jawaban anda.

10.48. Misalkan $\{\phi_n(x)\}$ = 1, 2, 3, . . . , ortonormal pada (a, b). Buktikanlah bahwa

$$\int_a^b \left[f(x) - \sum_{n=1}^{M} c_n \phi_n(x) \right]^2 dx$$

minimum bilamana

$$c_n = \int_a^b f(x)\, \phi_n(x)\, dx$$

Bahaslah hubungan ini dengan (a) deret Fourier dan (b) Soal 10.45.

10.49. (a) Tunjukkanlah bahwa fungsi 1, $2 - x$, $2 - 4x + x^2$ saling tegaklurus pada $(0, \infty)$ terhadap fungsi kepadatan e^{-x}. (b) Tentukanlah himpunan ortonormalnya.

10.50. Berikanlah sebuah tafsiran vektor untuk fungsi-fungsi yang ortonormal terhadap suatu fungsi kepadatan atau fungsi berbobot.

JAWABAN SOAL-SOAL LATIHAN

10.51. (a) $\dfrac{16}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(1-\cos n\pi)}{n}\sin\dfrac{n\pi x}{2}$

(b) $2 - \dfrac{8}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(1-\cos n\pi)}{n^2}\cos\dfrac{n\pi x}{4}$

(c) $20 - \dfrac{40}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}\sin\dfrac{n\pi x}{5}$

(d) $\dfrac{3}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left\{\dfrac{6(\cos n\pi - 1)}{n^2\pi^2}\cos\dfrac{n\pi x}{3} - \dfrac{6\cos n\pi}{n\pi}\sin\dfrac{n\pi x}{3}\right\}$

10.52. (a) $x = 0, \pm2, \pm4, \ldots, 0$ (b) tidak ada titik ketakkontinuannya.
(c) $x = 0, \pm10, \pm20, \ldots, 20$ (d) $x = \pm3; \pm9, \pm15, \ldots, 3$

10.53. $\dfrac{16}{\pi^2}\left\{\cos\dfrac{\pi x}{4} + \dfrac{1}{3^2}\cos\dfrac{3\pi x}{4} + \dfrac{1}{5^2}\cos\dfrac{5\pi x}{4} + \ldots\right\}$

10.54. (a) $\dfrac{8}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{n\sin 2nx}{4n^2-1}$ (b) $f(0) = f(x) = 0$

10.55. Jawabannya sama dengan Soal 10.29.

10.56. (a) $\dfrac{32}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}\sin\dfrac{n\pi}{2}\sin\dfrac{px}{8}$

(b) $2 + \dfrac{16}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{2\cos n\pi/2 - \cos n\pi - 1}{n^2}\right)\cos\dfrac{n\pi x}{8}$